数理解析研究所講究録
944 巻 1996 年 174-176

非線形周期型境界値問題に対する SOR 法の最適加速係数

大阪女子大学　石原 和夫　(Kazuo Ishihara)

1. SOR 法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ とし, $D, -L, -U$ は A の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $J = D^{-1}(L+U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$を Jの固有値, ωを加速係数, $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$, $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$, とする. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の SOR 法は $\boldsymbol{x}_{k+1} = H_\omega \boldsymbol{x}_k + \omega(D - \omega L)^{-1}\boldsymbol{b}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ となる。

補題 1 [1, 8] **.** (i) A が convergent ($\lim_{k \to \infty} A^k = \boldsymbol{O}$) $\Leftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k \to \infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow$ $\gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear .

仮定 1 .　A が consistently ordered かつ 2-cyclic である.
仮定 2 .　$\det A = 0$ かつ Jの固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題 2 [8] **.** A は仮定 1 を満たす正則行列, Jの固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする. $\Rightarrow$ H_ω は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる.

補題 3 [1, 2] **.** A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列, Jの固有値はすべて実数で$\rho(J) = 1$ とする. $\Rightarrow$ H_ω は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) , $\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる. $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}A$ の時, $\boldsymbol{x}_k$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解に収束する。

2. 差分方程式. 次のような周期型非線形微分方程式の境界値問題を考える.

$$
\text{(1)} \qquad \begin{cases} y''(x) = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = y(b), & y'(a) = y'(b). \end{cases}
$$

ここで $f(x, y)$, $f_y(x, y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geq 0$ は連続とする. $f_y(x, y) \equiv 0$ ならば解の一意性は失われるが, $f_y(x, y) \geq K > 0$ (K は定数) ならば, 解は一意に存在する. (1) の差分解を構成するため, $[a, b]$ を n 等分し, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + (i-1)h$, $0 \leq i \leq n+1$ を mesh type I とする.

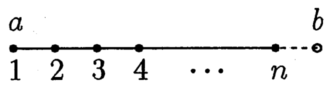

Fig.1. Mesh type I.

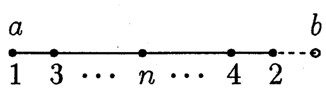

Fig.2. Mesh type II.

(1) を中心差分により近似し，$y(x_i)$ の近似解を v_i, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^t$ とすれば (1) の差分方程式 $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ は次のようになる．

$$(2) \qquad \begin{cases} F_i(\boldsymbol{v}) \equiv -v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1} + h^2 f(x_i, v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ v_1 = v_{n+1}, \quad v_0 = v_n. \end{cases}$$

$f_y(x,y) \equiv 0$ の時，(2) は特異な連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ として表され，$f_y(x,y) \geq K > 0$ の時は差分解 $\boldsymbol{v}_* = (v_{*,1}, v_{*,2}, \cdots, v_{*,n})^t$ は一意に存在する．(2) に対する SOR 法は

$$(3) \ v_{i,k+1} = v_{i,k} - \omega \frac{F_i(v_{1,k+1}, \cdots, v_{i-1,k+1}, v_{i,k}, \cdots, v_{n,k})}{\frac{\partial F_i}{\partial v_i}(v_{1,k+1}, \cdots, v_{i-1,k+1}, v_{i,k}, \cdots, v_{n,k})}, \ i = 1, 2, \cdots, n, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

となる．その時，次の局所収束定理 (Yamamoto [9]) が得られる．

定理 1(local convergence [9]). $f_y(x,y) \geq K > 0$ とする．SOR 法 (3) は $0 < \forall\omega < 2$ で $\boldsymbol{v}_*$ に局所収束する．

定理 2(global convergence). $M \geq f_y(x,y) \geq K > 0$ とする．任意の $\boldsymbol{v}_0$ に対して SOR 法 (3) が $0 < \forall\omega < \omega^*$ で $\boldsymbol{v}_*$ に収束するような $0 < \omega^* \leq 2$ が存在する．h が十分小さい時は $\omega^* \approx 2$. また $f(x,y) \equiv q(x)y + r(x)$ の時は $\omega^* = 2$.

次に最適加速係数の存在を考える．解 $\boldsymbol{v}_*$ における (3) の convergence factor $R_1(\boldsymbol{v}_*)$ を

$$R_1(\boldsymbol{v}_*) \equiv \sup\left\{ \limsup_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_*\|^{1/k} \ ; \ \{\boldsymbol{v}_k\} \in B \right\}$$

と定義する．ここで，B は (3) により生成され，$\boldsymbol{v}_*$ に収束するすべての $\{\boldsymbol{v}_k\}$ の集合である．また，$\boldsymbol{v}_*$ の近傍 V が存在し，$\forall\boldsymbol{v}_0 \in V$ に対して (3) が well-defined で，$\boldsymbol{v}_*$ に収束する時，$\boldsymbol{v}_*$ は (3) の attraction point という．mesh type I では (2) のヤコビアン行列 $F'(\boldsymbol{v})$ は仮定 1 を満足しないので次のような mesh type II の分割を考える．

$$x_0 = a - h, \ \ x_{n+1} = b, \ \ x_i = \begin{cases} a + (j-1)h, & \text{if } i = 2j-1, \\ b - jh, & \text{if } i = 2j, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

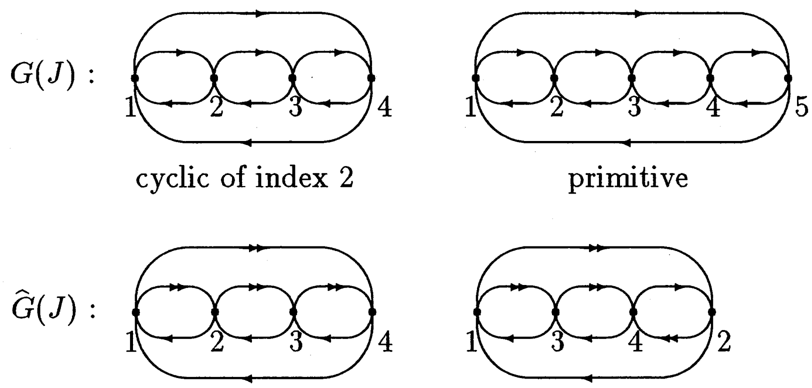

Fig.3. グラフ $G(J)$, $\widehat{G}(J)$.

定理 3． $f_y(x,y)\equiv 0$ とする．n は偶数, mesh type II の時, A は仮定 1, 2 を満足し, A に対する SOR 反復行列 $H_\omega^{(0)}$ は semiconvergent ($\gamma(H_\omega^{(0)})<1,\ 0<\omega<2$) で $\omega_{\mathrm{opt}}^{(0)}=\frac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}^{(0)}}^{(0)})=\min_{0<\omega<2}\gamma(H_\omega^{(0)})$ となる．

定理 4． $f_y(x,y)\geq K>0$ とする．n は偶数, mesh type II の時, $F'(\boldsymbol{v}_*)=D-L-U$ は仮定 1 を満足し, $\boldsymbol{v}_*$ は (3) の attraction point となり, $H_\omega(\boldsymbol{v}_*)$ は convergent ($\rho(H_\omega(\boldsymbol{v}_*))<1,\ 0<\omega<2$) で, SOR 法 (3) は $R_1(\boldsymbol{v}_*)$ を最小にする次のような最適加速係数ω_{opt} が存在する．

$$R_1(\boldsymbol{v}_*)=\rho(H_\omega(\boldsymbol{v}_*)),\quad \omega_{\mathrm{opt}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}},\quad \rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}(\boldsymbol{v}_*))=\min_{0<\omega<2}\rho(H_\omega(\boldsymbol{v}_*)),$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-(\frac{2}{2+f_{y,\max}h^2})^2}}\leq\omega_{\mathrm{opt}}\leq\frac{2}{1+\sqrt{1-(\frac{2}{2+f_{y,\min}h^2})^2}}.$$

ここで $H_\omega(\boldsymbol{v}_*)$ は $F'(\boldsymbol{v}_*)$ に対する SOR 反復行列, $J=D^{-1}(L+U)$,

$$f_{y,\min}=\min_{1\leq i\leq n}f_y(x_i,v_{*,i}),\quad f_{y,\max}=\max_{1\leq i\leq n}f_y(x_i,v_{*,i}).$$

さらに, $h=\frac{b-a}{n}$ が十分小ならば, $\omega_{\mathrm{opt}}\approx\omega_{\mathrm{opt}}^{(0)}=\frac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$.

数値例は講演時に示す．

参考文献

[1] Berman, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 6 (1985), 555 – 566.

[3] Ishihara, K., Successive overrelaxation method with projection for finite element solutions of nonlinear radiation cooling problems, Computing 38 (1987), 117–132.

[4] Ishihara, K., Projected successive overrelaxation method for finite element solutions to the Dirichlet problem for a system of nonlinear elliptic equations, J. Comput. Appl. Math., 38 (1991), 185 – 200.

[5] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two–point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), 385 – 393.

[6] Ishihara, K. and Yamamoto, M., On the optimum SOR iterations for finite difference approximation to periodic boundary value problems, Math. Japon., 41 (1995), 199 – 209.

[7] Oretega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, 1970.

[8] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.

[9] Yamamoto, T., On nonlinear SOR–like methods. II, to appear.